

## Содержание

Содержание.....	1
1. Теоретические основы ЦОС .....	2
1.1. Виды сигналов.....	2
1.1.1. Аналоговые сигналы.....	2
1.1.2. Дискретные сигналы.....	2
1.1.3. Цифровые сигналы .....	3
1.2. Аналоговые сигналы.....	3
1.2.1. Представление сигнала интегралом Фурье .....	3
1.2.2. Гармонические сигналы .....	5
1.2.3. Спектр сигнала .....	5
1.3. Получение цифрового сигнала .....	6
1.3.1. Частота дискретизации (не дописано) .....	6
1.3.2. Идеальный АЦП (не дописано) .....	6
1.4. Дискретное преобразование Фурье.....	7
1.4.1. Ряд Фурье.....	7
1.4.2. Дискретный случай.....	8
1.4.3. Смысл коэффициентов преобразования Фурье .....	9
1.4.4. Спектр действительного дискретного сигнала .....	10
1.5. Быстрое преобразование Фурье.....	11
1.5.1. БПФ с разделением по времени.....	11
1.5.1.1. Идея алгоритма .....	11
1.5.1.2. Бабочка.....	13
1.5.1.3. Реализация .....	14
1.5.1.4. Переупорядочивание .....	15
1.5.1.5. Развитие (не написано).....	16
1.5.2. БПФ с разделением по частоте (не написано).....	16

# 1. Теоретические основы ЦОС

## 1.1. Виды сигналов

### 1.1.1. Аналоговые сигналы

Любая физическая величина, которую можно измерить, может быть сигналом. С точки зрения ЦОС, значения сигналов это входные и выходные данные преобразования.

Математически, значение сигнала представляется непрерывной функцией времени, заданной на некотором интервале. Такой сигнал называется *аналоговым*.

$$x = g(t), t \in [t_{\min}, t_{\max}]$$

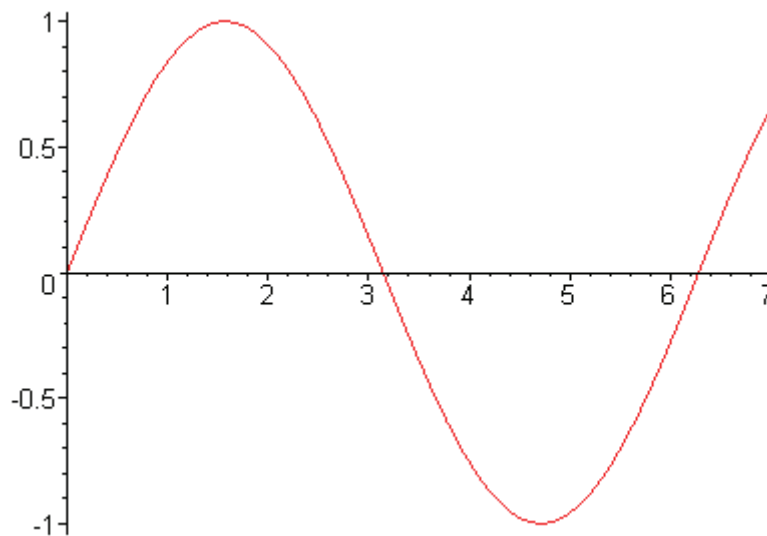


Рис 1. Аналоговый сигнал

Это наиболее полное и точное представление сигнала (если не учитывать уже присутствующие в нём помехи и погрешности), но в таком виде сигналы могут обрабатываться только аналоговыми средствами (фильтры, усилители и т.п., см. курс электроники).

### 1.1.2. Дискретные сигналы

Для цифровой обработки сигнал должен быть представлен как последовательность чисел, такая последовательность называется *дискретным сигналом*. Для того чтобы из аналогового сигнала, получить дискретный, нужно вычислить значение функции не на всём интервале, а только в избранных точках

$$x_k = g(t_k) \text{ где } k = 0, 1, 2 \dots$$

Такая последовательность называется также *выборкой* или *отсчетами* функции.

Если точки  $t_k$  расположены равномерно, можно ввести ещё два понятия:

$$t_k = kT, T - \text{период дискретизации, секунды}$$
$$f = \frac{1}{T}, f - \text{частота дискретизации, герцы}$$

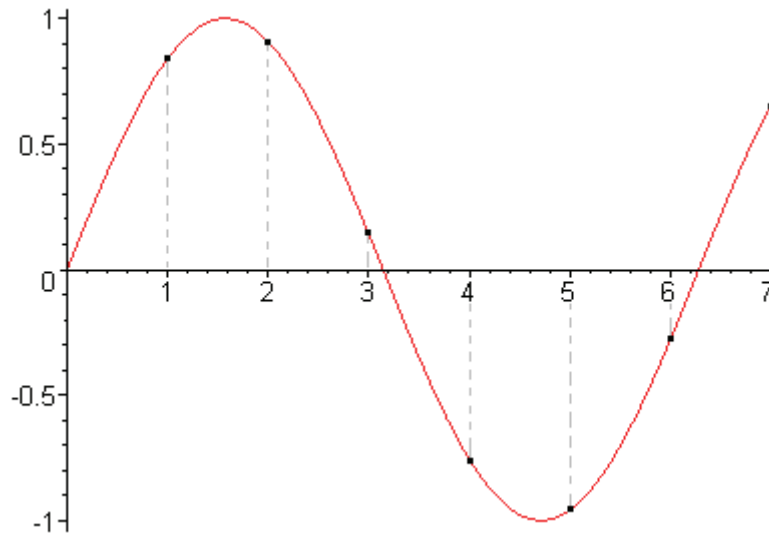


Рис 2. Дискретный сигнал, частота дискретизации 1 Гц

### 1.1.3. Цифровые сигналы

При теоретическом рассмотрении преобразований можно пользоваться дискретными сигналами, но на практике всегда возникает *погрешность квантования по уровню*, связанная с особенностью представления действительных чисел в цифровой форме. Значение числа, представленного в цифровой форме всегда принадлежит некоторому фиксированному набору значений – *уровней квантования*  $h_0, h_1, h_2, \dots, h_N$ . Выбирается значение из набора, ближайшее к реальному значению функции.

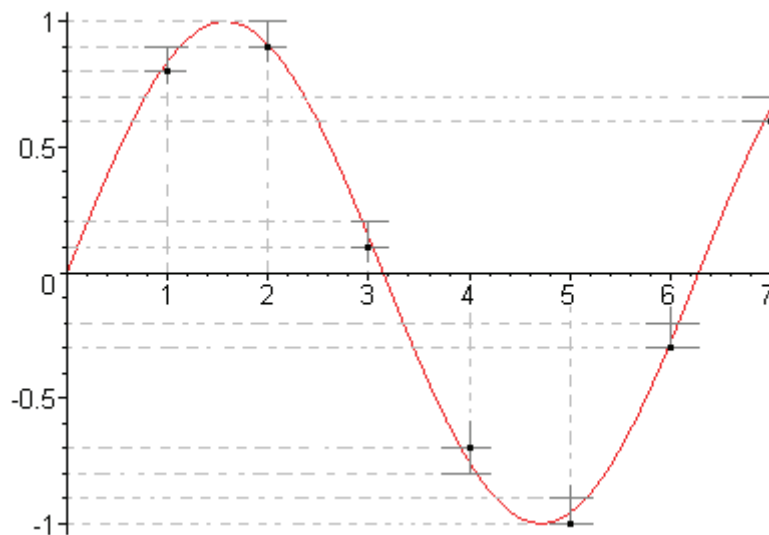


Рис 3. Цифровой сигнал

## 1.2. Аналоговые сигналы

### 1.2.1. Представление сигнала интегралом Фурье

Как известно из курса математического анализа, любая ограниченная непрерывная функция может быть сколь угодно точно представлена в виде интеграла Фурье (если вы не помните подробности преобразования Фурье, сейчас это не существенно, выкладки можно понять и так; ниже, в разделе «Дискретное преобразование Фурье» будет нестрогое, но более-менее понятное описание):

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(w) \cdot e^{iwt} dw$$

Или, разбив интеграл на мнимую и действительную части:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} [c(w) \cdot e^{iwt}] dw + i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} [c(w) \cdot e^{iwt}] dw$$

Очевидно, что если  $f(t) \in R$  при любом  $t$ , значение с правой стороны равенства тоже должно быть действительным, а значит мнимую часть можно не вычислять – если формулы верные, она всегда будет равна 0. Поэтому для действительных функций можно вычислять только действительную часть, это будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} c(w) &= A(w) e^{i\phi(w)} \quad (\text{представление комплексного числа в тригонометрической форме}) \\ c(w) \cdot e^{iwt} &= A(w) \cdot e^{i\phi(w)} \cdot e^{iwt} = A(w) \cdot e^{i[wt + \phi(w)]} \\ \operatorname{Re}[c(w) \cdot e^{iwt}] &= A(w) \cdot \cos[wt + \phi(w)] \end{aligned}$$

Подставляя, получаем:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(w) \cdot \cos[wt + \phi(w)] dw$$

Кроме того, поскольку для действительных функций выполняется равенство (не будем углубляться в его доказательство, можете обратиться к курсу математического анализа):

$$c(-w) = \overline{c(w)} = A(w) \cdot e^{-i\phi(w)}$$

Можно избавиться от отрицательной половины интервала интегрирования:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 A(w) \cdot \cos[wt + \phi(w)] dw &= \int_0^{\infty} A(-w) \cdot \cos[-wt + \phi(-w)] dw = \int_0^{\infty} A(w) \cdot \cos[-wt - \phi(w)] d\varpi = \\ &= \int_0^{\infty} A(w) \cdot \cos[wt + \phi(w)] dw \end{aligned}$$

Значит:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(w) \cdot \cos[wt + \phi(w)] dw = 2 \int_0^{\infty} A(w) \cdot \cos[wt + \phi(w)] dw = \int_0^{\infty} A^*(w) \cdot \cos[wt + \phi(w)] dw$$

Где

$$A^*(w) = 2A(w)$$

Поскольку аналоговые сигналы принимают действительные значения, непрерывны и ограничены (так как это значения физических величин), они удовлетворяют условиям и могут быть представлены подобным образом.

### 1.2.2. Гармонические сигналы

Таким образом, любой аналоговый сигнал можно рассматривать как суперпозицию бесконечного числа сигналов вида:

$$g(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Такой сигнал называется *гармоническим сигналом* или просто *гармоникой*. Он описывается тремя параметрами:

$A$  - амплитуда

$\omega$  - частота. Обратите внимание:  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  а не  $\frac{1}{\omega}$ . Эта частота измеряется в рад/с.

$\phi$  - фаза

На рисунке показана взаимосвязь между параметрами и внешним видом функции.

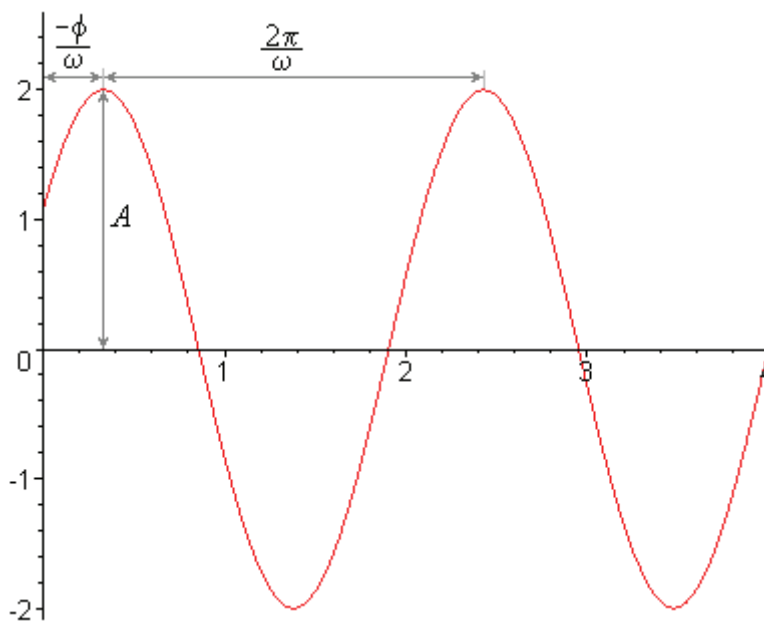


Рис 4. Сигнал  $g(t) = 2 \cos(3t + (-1))$

Этот же сигнал можно представить в форме реальной части комплексного сигнала:

$$g(t) = A \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}[Ae^{i\phi} \cdot e^{i\omega t}]$$

В таком виде более явно отделены «ядро» функции – частотная составляющая и «коэффициенты» – амплитуда и фаза.

### 1.2.3. Спектр сигнала

*Спектром сигнала* будем называть функцию от  $\omega$ , определяющую множители экспонент, входящих в состав сигнала. При таком определении спектра подходящей функцией будет  $A(\omega) \cdot e^{i\phi(\omega)}$  из раздела «Представление сигнала интегралом Фурье».

Альтернативному определению спектра как функции, определяющей амплитуды гармоник, соответствует функция  $A^*(\omega)$  из того же раздела. Но, поскольку, основным параметром спектра является именно амплитуда, а амплитуды функций  $A^*(\omega)$  и  $A(\omega) \cdot e^{i\phi(\omega)}$  пропорциональны, выбор определения спектра не имеет большого значения.

*Полоса сигнала* – область спектра, в которой амплитуды отличны от 0. *Ширина* полосы сигнала – разность между частотами в конце и в начале полосы. Спектры физических сигналов стремятся к 0 при  $\omega \rightarrow \infty$ , поэтому имеют конечную ширину. Вообще, когда говорят о полосе сигнала, обычно имеется в виду не какой-то конкретный сигнал, а все сигналы некоторой группы. Например, входные или все выходные сигналы устройства находятся в некоторой полосе.

Большой класс преобразований сигналов направлен на изменение спектра – увеличение или наоборот уменьшение амплитуд в заданном интервале частот (например, с целью подавления помех). Количественно изменение амплитуд измеряется в децибелах:

$$\Delta U = 10 \ln \frac{A_2}{A_1}$$

Уменьшению амплитуды в два раза ( $A_1$  – амплитуда до преобразования,  $A_2$  – после) соответствует  $\Delta U \approx -6$ , увеличению в два раза -  $\Delta U \approx 6$ .

### 1.3. Получение цифрового сигнала

#### 1.3.1. Частота дискретизации (не дописано)

Про Найквиста и/или Котельникова, про отражения.

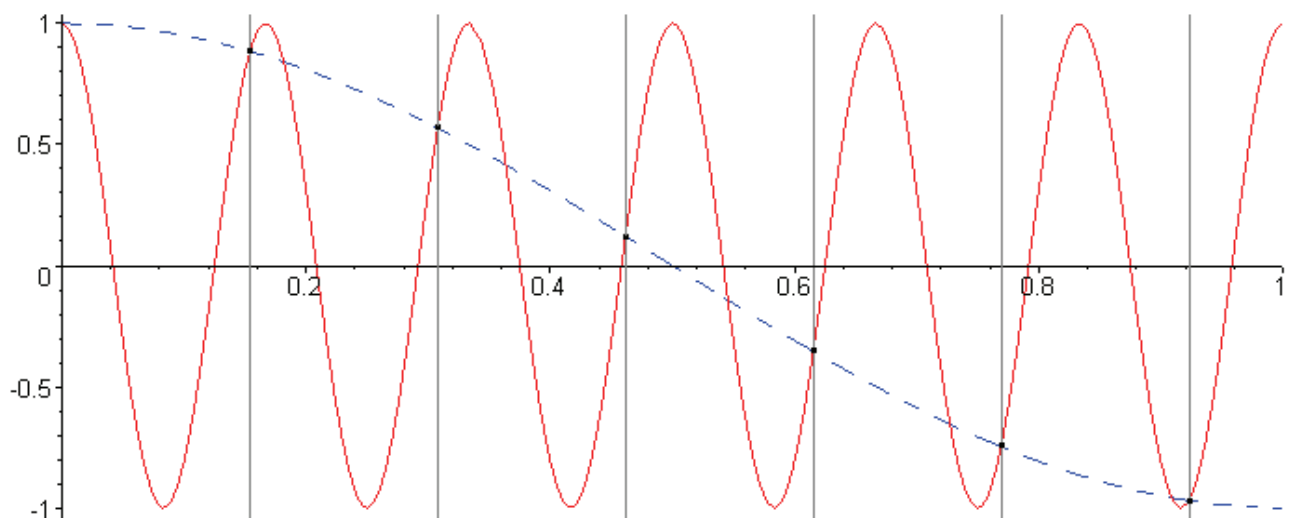


Рис 5. Неудачный выбор частоты дискретизации

#### 1.3.2. Идеальный АЦП (не дописано)

Кратенько про идеальный АЦП, его передаточную функцию, про погрешность квантования, про её средне квадратичное значение по всем частотам и про её частотное распределение. Просто обозначить проблему, без доказательств, даже частично без ответов на вопросы.

## 1.4. Дискретное преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) – одна из основ цифровой обработки сигналов. Для понимания его сути полезно сначала рассмотреть разложение в ряд Фурье, после чего действовать «по аналогии». Это связано с тем, что в непрерывном случае получаются более красивые и понятные выкладки. Поскольку основной целью было именно понимание смысла формул, а не их строгий вывод, в некоторых местах опущены доказательства и используются не совсем точные формулировки.

### 1.4.1. Ряд Фурье

Рассмотрим множество  $F$  – множество непрерывных и ограниченных функций вида  $R \rightarrow C$ , заданных на интервале  $[0, 2\pi]$  (остальная часть нас не интересует). Сумма двух функций из  $F$  даёт функцию из  $F$ , умножение на комплексный параметр тоже, несложно найти «ноль» и «единицу». Таким образом, вводим на  $F$  операцию сложения, на  $F$  и  $C$  – операцию умножения, и получаем бесконечномерное линейное пространство над полем  $C$  (если подходить строго, всё это надо доказывать, это не сложно, но длинно; не будем этого делать).

Определим операцию «скалярное произведение» (доказательство выполнения свойств опущено).

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \overline{g(x)} \cdot dx, \text{ где } \overline{g(x)} \text{ означает комплексное дополнение } g(x)$$

Соответственно вводится понятие ортогональности и нормы.

- Функции  $f$  и  $g$  называются ортогональными, если  $(f, g) = 0$ .
- Норма  $\|f\|^2 = (f, f)$

Замечательные функции вида  $e^{inx}$ , где  $n = 0, 1, \dots$  принадлежат  $F$  и попарно ортогональны. Действительно:

$$(e^{inx}, e^{imx}) = \int_0^{2\pi} e^{inx} \cdot \overline{e^{imx}} \cdot dx = \int_0^{2\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx} \cdot dx = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} \cdot dx = 0, \text{ если } n \neq m$$

Норма каждой такой функции:

$$\|e^{inx}\|^2 = (e^{inx}, e^{inx}) = \int_0^{2\pi} e^{inx} \cdot \overline{e^{inx}} \cdot dx = \int_0^{2\pi} e^{inx} \cdot e^{-inx} \cdot dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$$

Итак, набор функций  $\{e^{inx}\}_{n=0}^{\infty}$  – ортогональная система векторов в  $F$ , более того, это базис  $F$  (доказательство оставим за рамками курса; в бесконечномерном пространстве не любая линейно независимая система векторов будет базисом). Разложим произвольную функцию  $f$  по базису  $\{e^{inx}\}_{n=0}^{\infty}$ :

$$f = a_0 \cdot e^{i0x} + a_1 \cdot e^{ix} + a_2 \cdot e^{i2x} + \dots + a_n \cdot e^{inx} + \dots$$

Ряд, получающийся при разложении функции из  $F$  по ортогональному базису, называется *ряд Фурье*. Разложение по  $\{e^{inx}\}_{n=0}^{\infty}$  – наиболее употребительный частный случай. Формула

для определения коэффициентов разложения вектора по ортогональному базису известна из линейной алгебры:

$$a_n = \frac{(x, l_n)}{\|l_n\|^2}, \text{ где } l_n - n\text{-й вектор базиса, а } x - \text{раскладываемый вектор}$$

Она подходит для любых линейных пространств, в данном случае это будет выглядеть так:

$$a_n = \frac{(f, e^{inx})}{\|e^{inx}\|^2} = \frac{(f, e^{inx})}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx$$

Минус в  $e^{-inx}$  появился из-за того, что это комплексное дополнение (см. наше определение скалярного произведения).

### 1.4.2. Дискретный случай

На входе преобразования  $N$  чисел, являющихся значениями функции  $f(t)$  в моменты времени  $\{0, 1, 2, \dots, (N - 1)\}$ .

Действуем по аналогии с непрерывным случаем. Рассмотрим множество  $F_N$  – множество конечных векторов  $\{f_n\}_{n=0}^{N-1}$ ,  $f_n \in C$ . Сумма двух векторов из  $F_N$  даёт вектор из  $F_N$ , умножение на комплексный параметр тоже, несложно найти «ноль» и «единицу». Таким образом, вводим на  $F_N$  операцию сложения, на  $F_N$  и  $C$  – операцию умножения, и получаем линейное пространство над полем  $C$ . В отличие от непрерывного случая, это конечномерное линейное пространство, его размерность равна  $N$ .

Введём операцию скалярного произведения:

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot \overline{g_k}$$

Введём ортогональность и норму:

- Вектора  $f$  и  $g$  называются ортогональными, если  $(f, g) = 0$ .
- Норма  $\|f\|^2 = (f, f)$

Рассмотрим вектора, образуемые функциями  $\exp(i \frac{2\pi}{N} \cdot nx)$ ,  $n = 0, 1, \dots, (N - 1)$ . Они попарно ортогональны (доказательство оставим за рамками курса, проще всего это утверждение доказывается геометрически), квадрат нормы такого вектора равен  $N$ .

$$\left\| \exp(i \frac{2\pi}{N} \cdot nx) \right\|^2 = \left( \exp(i \frac{2\pi}{N} \cdot nx), \exp(i \frac{2\pi}{N} \cdot nx) \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(i \frac{2\pi}{N} \cdot nk) \exp(-i \frac{2\pi}{N} \cdot nk) = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N$$

Для сокращения записи введём обозначение:

$$\varpi_N = \exp(i \frac{2\pi}{N})$$

Соответственно:



$$\varpi_N^{nx} = \exp\left(i \frac{2\pi}{N} \cdot nx\right), \quad \varpi_N^{-nx} = \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} \cdot nx\right)$$

Разложим произвольный вектор  $f$  по базису  $\{\varpi_N^{nx}\}_{n=0}^{N-1}$  (в данном случае нет нужды специально доказывать, что это базис – в конечномерном пространстве базисом является любая линейно независимая система векторов подходящей размерности).

$$f_n = a_0 \cdot \varpi_N^0 + a_1 \cdot \varpi_N^n + a_2 \cdot \varpi_N^{2n} + \dots + a_{N-1} \cdot \varpi_N^{(N-1)n}$$

Поскольку это линейное пространство – конечномерное, разложение конечное и точное, а не приближительное, как в непрерывном случае. Но коэффициенты разложения вычисляются из тех же соображений:

$$a_n = \frac{(f, \varpi_N^{nx})}{\|\varpi_N^{nx}\|^2} = \frac{(f, \varpi_N^{nx})}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \varpi_N^{-nk}$$

Именно это выражение – формула вычисления коэффициентов вектора, являющегося результатом дискретного преобразования Фурье.

### 1.4.3. Смысл коэффициентов преобразования Фурье

По построению, коэффициенты ДПФ обладают следующим свойством:

$$f_n = a_0 \cdot \varpi_N^0 + a_1 \cdot \varpi_N^n + a_2 \cdot \varpi_N^{2n} + \dots + a_{N-1} \cdot \varpi_N^{(N-1)n}$$

Или, более кратко:

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varpi_N^{nk}$$

Эта *обратное преобразование Фурье*. Несложно заметить, что оно является дискретным аналогом приводившейся выше формулы интеграла Фурье:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(w) \cdot e^{iwt} dw$$

Далее, более-менее по аналогии:

- Любой дискретный сигнал, состоящий из  $N$  отсчётов, точно представим как сумма векторов, образованных функциями  $\varpi_N^{kx}$ , где  $k = 0..(N-1)$
- $\frac{2\pi}{N}k$  - частота (вспоминаем, что  $\varpi_N^{nx} = \exp\left(i \frac{2\pi}{N} \cdot nx\right)$ ).
- Вектор  $\{a_k\}_{k=0}^{N-1}$ ,  $a_k \in C$  - спектр дискретного сигнала. Одна интересная особенность этого спектра для сигнала, состоящего из действительных чисел, описана ниже.

- Представив  $a_k$  в тригонометрической форме и отбросив мнимую часть, можно получить представление дискретного сигнала в виде суммы гармоник (косинусов) с частотами  $\frac{2\pi}{N}k$ . Фазы и амплитуды определяются  $a_k$ .
- Полностью аналогичные соображения о полосе сигнала, её ширине и децибелах.

Мы наконец получили то, с чего все обычно начинают: ДПФ действительно раскладывает сигнал по спектру. Долго, но зато более-менее строго и доказательно.

Кстати, проверим утверждение о точности представления – подставим формулу вычисления коэффициентов в формулу обратного преобразования:

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varpi_N^{kn} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} f_p \varpi_N^{-kp} \right] \varpi_N^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} f_p \varpi_N^{-kp} \varpi_N^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} f_p \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \varpi_N^{kn} \varpi_N^{-kp} \right]$$

Выражение, заключённое в квадратные скобки – скалярное произведение векторов, образованных функциями  $\varpi^{nx}$  и  $\varpi^{px}$ . При  $p \neq n$  эти вектора ортогональны, их скалярное произведение равняется нулю, когда  $p = n$ , скалярное произведение равно  $N$ . В результате, для всех  $p \neq n$ ,  $f_p$  умножается на 0, а для  $p = n$  – на  $N$ . Но при  $p = n$   $f_p$  будет равно  $f_n$ . Получаем:

$$f_n = \frac{1}{N} f_n N = f_n$$

Что и требовалось доказать.

#### 1.4.4. Спектр действительного дискретного сигнала

Вычислим  $a_{(N-n)}$ :

$$a_{(N-n)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \varpi_N^{-(N-n)k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \varpi_N^{-Nk} \varpi_N^{nk}$$

Заметим, что:

$$\varpi_N^{-Nk} = \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} \cdot Nk\right) = \exp(-i2\pi k) = 1$$

В результате:

$$a_{(N-n)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \varpi_N^{nk}$$

Эта формула верна независимо от того, действительные значения  $f_k$  или комплексные. Но если они действительные, то  $f_k \varpi_N^{nk} = \overline{f_k \varpi_N^{-nk}}$ . Подставляя, получаем:

$$a_{(N-n)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \varpi_N^{nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{f_k \varpi_N^{-nk}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{f_k \varpi_N^{-nk}} = \overline{a_n}$$

То есть, при действительных  $f_k$ , для любых  $n$ ,  $\operatorname{Re}[a_{(N-n)}] = \operatorname{Re}[a_n]$  и  $\operatorname{Im}[a_{(N-n)}] = -\operatorname{Im}[a_n]$ . Это проявляется в том, что если подать на вход преобразования вектор  $\left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \right\}_{n=0}^{N-1}$ , получатся значения:  $a_0 = 0 + i0$ ,  $a_1 = 0.5 + i0$ ,  $a_2 = 0 + i0$ , ... (все нули)...,  $a_{N-1} = 0.5 + i0$ , вместо на первый взгляд логичных  $a_0 = 0 + i0$ ,  $a_1 = 1 + i0$ ,  $a_2 = 0 + i0$ , ... (все нули)...,  $a_{N-1} = 0 + i0$ .

После второго взгляда становится ясно, что второй набор значений соответствует функции  $\exp\left(i\frac{2\pi}{N}n\right)$  и исходному вектору  $\left\{ \exp\left(i\frac{2\pi}{N}n\right) \right\}_{n=0}^{N-1}$ . А этот вектор имеет ненулевую мнимую часть, которой после обратного преобразования быть не должно. Для компенсации мнимой части, при обратном преобразовании в сумме будет присутствовать дополнительное слагаемое -  $a_{N-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{N}[N-1]n\right)$ . В результате действительные части удваиваются, а мнимые взаимно уничтожаются.

## 1.5. Быстрое преобразование Фурье

Выполнение ДПФ «в лоб» по формуле требует  $O(N^2)$  операций умножения для вычисления всех коэффициентов ( $N$  коэффициентов,  $O(N)$  на каждый). Группа алгоритмов, позволяющих вычислить коэффициенты ДПФ быстрее, называется *быстрым преобразованием Фурье* (БПФ). Существуют различные варианты БПФ, ниже рассмотрены два основных.

### 1.5.1. БПФ с разделением по времени

#### 1.5.1.1. Идея алгоритма

Разложим сумму от 0 до  $N$  на две – одну для четных значений  $k$ , вторую для нечетных. В предположении, что  $N$  делится на 2, это будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \varpi_N^{-nk} = \frac{1}{N} \left( \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2k} \varpi_N^{-n2k} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2k+1} \varpi_N^{-n(2k+1)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{N/2} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2k} \varpi_N^{-n2k} + \frac{1}{N/2} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2k+1} \varpi_N^{-n(2k+1)} \right) \end{aligned}$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned} \varpi_N^{-n2x} &= \exp\left(-i\frac{2\pi}{N} \cdot n2x\right) = \exp\left(-i\frac{2\pi}{N/2} \cdot nx\right) = \varpi_{N/2}^{-nx} \\ \varpi_N^{-n(2x+1)} &= \varpi_N^{-n} \cdot \varpi_N^{-n2x} = \varpi_N^{-n} \cdot \varpi_{N/2}^{-nx} \end{aligned}$$

И введём обозначения для четной и нечетной составляющей вектора  $f$ :

$$\begin{aligned} f_k^{\text{чет}} &= f_{2k} \\ f_k^{\text{нечет}} &= f_{2k+1} \end{aligned}$$

А теперь подставим всё в последнее выражение:

$$a_n = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{1}{N/2} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_k^{чет} \varpi_{N/2}^{-nk} \right] + \varpi_N^{-n} \left[ \frac{1}{N/2} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_k^{нечет} \varpi_{N/2}^{-nk} \right] \right)$$

Цель этих выкладок – свести преобразование вектора длиной N к преобразованию двух (в общем случае – нескольких) более коротких векторов. Выражения, стоящие в квадратных скобках, уже очень похожи на  $a_n^{чет}$  и  $a_n^{нечет}$  соответственно, единственное, что пока мешает – диапазон значений n. Сейчас n принимает значения от 0 до (N-1), а хотелось бы ограничить её диапазоном от 0 до (N/2-1).

Рассмотрим два случая:

1. Пусть  $0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$

$$a_n = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{1}{N/2} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_k^{чет} \varpi_{N/2}^{-nk} \right] + \varpi_N^{-n} \left[ \frac{1}{N/2} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_k^{нечет} \varpi_{N/2}^{-nk} \right] \right) = \frac{1}{2} (a_n^{чет} + \varpi_N^{-n} a_n^{нечет})$$

2. Пусть  $n = \frac{N}{2} + v$ ,  $0 \leq v \leq \frac{N}{2} - 1$

$$a_n = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{1}{N/2} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_k^{чет} \varpi_{N/2}^{-(N/2+v)k} \right] + \varpi_N^{-(N/2+v)} \left[ \frac{1}{N/2} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_k^{нечет} \varpi_{N/2}^{-(N/2+v)k} \right] \right)$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned} \varpi_{N/2}^{-(N/2+v)k} &= \exp(-i \frac{2\pi}{N/2} \cdot [\frac{N}{2} + v]k) = \exp(-i \frac{2\pi}{N/2} \cdot \frac{N}{2} k) \cdot \exp(-i \frac{2\pi}{N/2} \cdot vk) = \exp(-i \frac{2\pi}{N/2} \cdot vk) = \varpi_{N/2}^{-vk} \\ \varpi_N^{-(N/2+v)} &= \exp(-i \frac{2\pi}{N} \cdot [\frac{N}{2} + v]) = \exp(-i \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2}) \cdot \exp(-i \frac{2\pi}{N} \cdot v) = -\exp(-i \frac{2\pi}{N} \cdot v) = -\varpi_N^{-v} \end{aligned}$$

Подставим:

$$a_n = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{1}{N/2} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_k^{чет} \varpi_{N/2}^{-vk} \right] - \varpi_N^{-v} \left[ \frac{1}{N/2} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_k^{нечет} \varpi_{N/2}^{-vk} \right] \right) = \frac{1}{2} (a_v^{чет} - \varpi_N^{-v} a_v^{нечет})$$

В итоге, получены формулы, выражающие коэффициенты ДПФ исходного вектора через коэффициенты ДПФ его чётной и нечётной составляющих.

Для  $0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$

$$a_n = \frac{1}{2} (a_n^{чет} + \varpi_N^{-n} \cdot a_n^{нечет})$$

$$a_{(N/2+n)} = \frac{1}{2} (a_n^{чет} - \varpi_N^{-n} \cdot a_n^{нечет})$$

Поскольку вектора  $f^{чет}$  и  $f^{нечет}$  состоят из  $\frac{N}{2}$  элементов, вычисление ДПФ «в лоб» для каждого из них потребует  $O\left(\left[\frac{N}{2}\right]^2\right) = \frac{O(N^2)}{4}$  операций умножения, в сумме  $\frac{O(N^2)}{2}$  умножений. Если не останавливаться на достигнутом, и применить полученные формулы для вычисления не только  $a_n$ , но и  $a_n^{чет}$  с  $a_n^{нечет}$ , и всех остальных получающихся коэффициентов, получится алгоритм *быстрого преобразования Фурье с разделением по времени*. Он требует порядка  $O(N \log_2 N)$  умножений. Для того чтобы его использование было возможно, количество элементов в векторах каждый раз должно делиться на 2, то есть N должно быть степенью 2.

### 1.5.1.2. Бабочка

Рассмотрим вырожденный случай: ДПФ вектора, состоящего из одного отсчёта. Результирующий вектор также состоит из одного элемента  $a_0$ , чтобы вычислить его, подставим в формулу N=1 и n=0, получим:

$$a_0 = \frac{1}{1} \sum_{k=0}^{1-1} f_k \varpi_1^{-0k} = f_0 \varpi_1^0 = f_0$$

То есть, ДПФ вектора, состоящего из одного элемента равен этому вектору. ДПФ вектора из двух отсчётов можно получить, разложив вектор на  $f^{чет}$  и  $f^{нечет}$ , состоящие из одного элемента и подставив в формулы БПФ, выведенные выше:

$$a_0 = \frac{1}{2} (a_0^{чет} + \varpi_2^0 \cdot a_0^{нечет}) = \frac{1}{2} (f_0^{чет} + f_0^{нечет})$$

$$a_1 = \frac{1}{2} (a_0^{чет} - \varpi_2^0 \cdot a_0^{нечет}) = \frac{1}{2} (f_0^{чет} - f_0^{нечет})$$

Используя эти значения, можно с помощью тех же формул получить ДПФ вектора из 4-х элементов, потом из 8-ми, потом из 16-ти и т.п. Теперь несколько модифицируем преобразование – уберём из формул множителя  $\frac{1}{2}$ , в итоге получим:

$$a'_n = a_n^{чет} + \varpi_N^{-n} \cdot a_n^{нечет}$$

$$a'_{(N/2+n)} = a_n^{чет} - \varpi_N^{-n} \cdot a_n^{нечет}$$

Это – каноническая базовая операция БПФ, так называемая *бабочка*. Графически она изображается так:

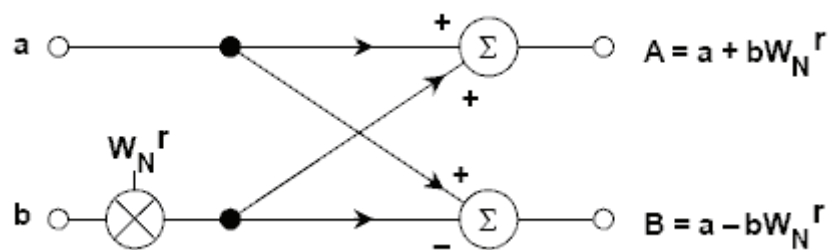


Рис. 6. «Бабочка»

Для получения «честных» результатов ДПФ нужно разделить  $a'_n$  на  $N$ .

### 1.5.1.3. Реализация

Рассмотрим БПФ на 8 точек. На входе  $\{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$ , на выходе должно получиться  $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ . Для начала получим  $\{a'_0, a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, a'_5, a'_6, a'_7\}$ . Ход рассуждений примерно таков:

1. Для получения  $a'$  нужны вектора  $a'^{\text{чет}}$  и  $a'^{\text{нечет}}$ .
2.  $f^{\text{чет}} = \{f_0, f_2, f_4, f_6\}$ ,  $f^{\text{нечет}} = \{f_1, f_3, f_5, f_7\}$
3. Для получения  $a'^{\text{чет}}$  нужны  $a'^{\text{чет} - \text{чет}}$  и  $a'^{\text{чет} - \text{нечет}}$ , для получения  $a'^{\text{нечет}}$  нужны  $a'^{\text{нечет} - \text{чет}}$  и  $a'^{\text{нечет} - \text{нечет}}$ .
4.  $f^{\text{чет} - \text{чет}} = \{f_0, f_4\}$ ,  $f^{\text{чет} - \text{нечет}} = \{f_2, f_6\}$ ,  $f^{\text{нечет} - \text{чет}} = \{f_1, f_5\}$ ,  $f^{\text{нечет} - \text{нечет}} = \{f_3, f_7\}$
5. Для получения  $a'^{\text{чет} - \text{чет}}$  нужны  $a'^{\text{чет} - \text{чет} - \text{чет}}$  и  $a'^{\text{чет} - \text{чет} - \text{нечет}}$ , и т.д., всего восемь векторов со всеми вариантами перестановок.
6.  $f^{\text{чет} - \text{чет} - \text{чет}} = \{f_0\}$ ,  $f^{\text{чет} - \text{чет} - \text{нечет}} = \{f_4\}$  - вектора состоят из одного элемента, значит  $a'^{\text{чет} - \text{чет} - \text{чет}} = f_0$  и  $a'^{\text{чет} - \text{чет} - \text{нечет}} = f_4$ . Аналогично со всеми остальными векторами.

Соответственно, алгоритм должен выглядеть так:

1. Получить  $f^{\text{чет} - \text{чет} - \text{чет}} = \{f_0\}$ ,  $f^{\text{чет} - \text{чет} - \text{нечет}} = \{f_4\}$  и остальные одноэлементные вектора.
2. При помощи «бабочки» получить из соответствующих пар векторов  $a'^{\text{чет} - \text{чет}}$ ,  $a'^{\text{чет} - \text{нечет}}$ ,  $a'^{\text{нечет} - \text{чет}}$  и  $a'^{\text{нечет} - \text{нечет}}$ .
3. При помощи «бабочки» получить из пары  $a'^{\text{чет} - \text{чет}}$ ,  $a'^{\text{чет} - \text{нечет}}$  вектор  $a'^{\text{чет}}$ , из пары  $a'^{\text{нечет} - \text{чет}}$ ,  $a'^{\text{нечет} - \text{нечет}}$  - вектор  $a'^{\text{нечет}}$ .
4. При помощи «бабочки» получить  $a'$ .
5. Поделить все элементы  $a'$  на 8, получить  $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$

Графически это выглядит так:

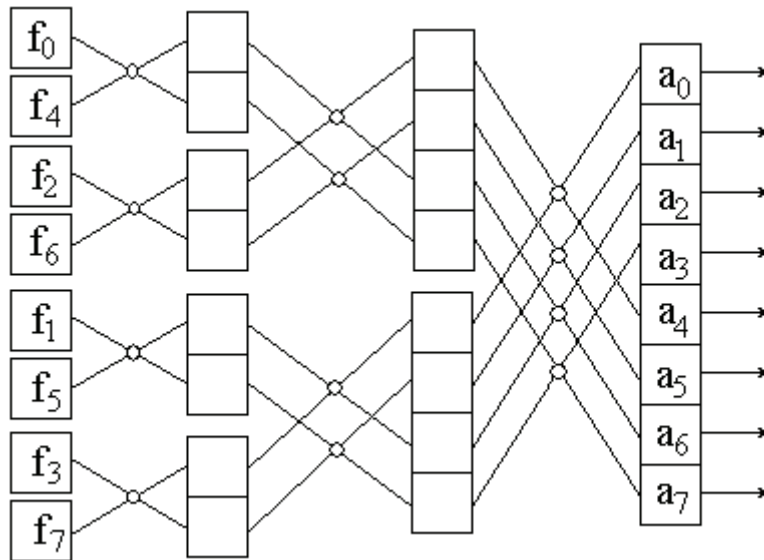


Рис. 7. Последовательность вычислений 8-ми точечного БПФ с разделением по времени

Единственное, что пока не ясно – как в общем виде определить, в каком порядке нужно расставить исходные данные, чтобы из одноэлементных векторов получились «соответствующие пары».

#### 1.5.1.4. Переупорядочивание

Рассмотрим подробнее вектора  $f$ , над которыми выполняется преобразование. На Рис. 8. изображён исходный вектор  $f = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$ , распадающийся на два вектора  $f^{чет} = \{f_0, f_2, f_4, f_6\}$  и  $f^{нечет} = \{f_1, f_3, f_5, f_7\}$ , в свою очередь распадающиеся дальше, до тех пор, пока в векторах не останется по одному элементу.

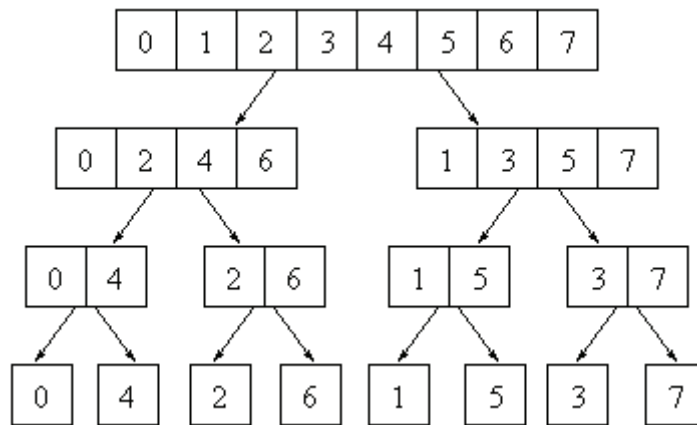


Рис.8. «Подвектора» БПФ с разделением по времени

В левый подвектор уходят элементы, стоящие на чётных позициях, в правый – на нечётных. Если представить номера элементов в двоичном виде, можно заметить следующую закономерность:

- При первичном разделении номер элемента совпадает с номером позиции, поэтому чётность определяется значением младшего (нулевого) бита элемента.
- На следующем этапе элементы распределяются по значениям первого бита.
- На третьем шаге – по значению второго бита.

Обобщая результат, получаем, что позиция элемента в нижней строке совпадает с двоичным значением номера элемента, прочитанным в обратную сторону (так что младший разряд становится старшим и наоборот).

Исходя из этого правила выполняется начальное упорядочивание исходных данных при реализации БПФ с разделением по времени.

#### **1.5.1.5. Развитие (не написано)**

Про разложение по другому основанию.

#### **1.5.2. БПФ с разделением по частоте (не написано)**